

# Intégrales et Primitives

Aubin SIONVILLE

MPI Clemenceau - 2021-2023

## Théorèmes d'intégration

### Croissance de l'intégrale

Hypothèses :

$f$  et  $g$  continues sur  $I$   
 $\forall x \in I, f(x) \leq g(x)$   
 $(a, b) \in I^2, a \leq b$

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$$

### Linéarité de l'intégrale

Hypothèses :

$f$  et  $g$  continues sur  $I$   
 $(a, b) \in I^2, (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$

$$\int_a^b \alpha f(x) + \beta g(x)dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx$$

## Inégalités

### Inégalité triangulaire

Hypothèses :

$f$  est continue sur  $I$   
 $(a, b) \in I^2, a \leq b$

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$$

### Inégalité de Cauchy-Schwarz

Hypothèses :

$f$  et  $g$  sont continues sur  $I$   
 $(a, b) \in I^2, a \leq b$

$$\left( \int_a^b f(x)g(x)dx \right)^2 \leq \int_a^b f(x)^2dx \int_a^b g(x)^2dx$$

# Manoeuvres

## Intégration par parties

Hypothèses :

$f$  et  $g \mathcal{C}^1$  sur  $I$   
 $(a, b) \in I^2, a \leq b$

$$\int_a^b u'(t)v(t)dt = \left[ u(t)v(t) \right]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)dt$$

## Changement de variable

Hypothèses :

$f$  continue sur  $I$   
 $\varphi : J \rightarrow I \mathcal{C}^1$   
 $(a, b) \in I^2, a \leq b$   
 $(\alpha, \beta) \in J^2, a = \varphi(\alpha), b = \varphi(\beta)$

$$\int_{\alpha}^{\beta} \varphi'(t)f(\varphi(t))dt = \int_a^b f(u)du$$

$$\frac{du}{dt} = \varphi'(t) \text{ donc } du = \varphi'(t)dt$$

## Règles de Bioche

Hypothèses :  $f$  est composée de fractions, sin, cos, tan... (fonctions "simples")

$$f(u) \neq 0 \text{ et } (d)(-u) = du \implies \begin{array}{l} t = \cos(u) \\ dt = -\sin(u)du \end{array}$$

$$f(\pi - u) \neq 0 \text{ et } (d)(\pi - u) = du \implies \begin{array}{l} t = \sin(u) \\ dt = \cos(u)du \end{array}$$

$$f(\pi + u) \neq 0 \text{ et } (d)(\pi + u) = du \implies \begin{array}{l} t = \tan(u) \\ dt = \frac{du}{1+u^2} \end{array}$$